

Depto. Matemáticas – IES Elaios

Tema: **Probabilidad**

## **5. TEOREMAS DE PROBABILIDAD**

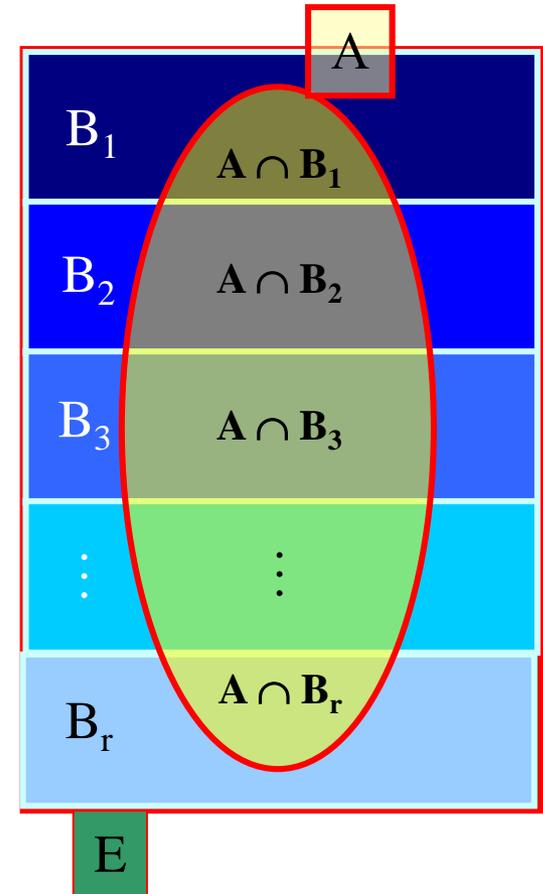
Presentación elaborada por el profesor José M<sup>a</sup> Sorando,  
ampliando y adaptando las diapositivas de la **Editorial SM**

## Teorema de la Probabilidad Total

### -apuntes-

Sea  $B_1, B_2, \dots, B_r$  un sistema completo de sucesos. Entonces:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{A}) &= p(\mathbf{A} \cap \mathbf{E}) = p[\mathbf{A} \cap (\mathbf{B}_1 \cup \mathbf{B}_2 \cup \dots \cup \mathbf{B}_r)] && \text{pr. distributiva} \\ &= p[(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_1) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_2) \cup \dots \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_r)] && \text{suc. Incompatibles} \\ &= p(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_1) + p(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_2) + \dots + p(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}_r) = \\ &= p(\mathbf{B}_1) \cdot p(\mathbf{A} / \mathbf{B}_1) + p(\mathbf{B}_2) \cdot p(\mathbf{A} / \mathbf{B}_2) + \dots + p(\mathbf{B}_r) \cdot p(\mathbf{A} / \mathbf{B}_r) \end{aligned}$$



## Teorema de la Probabilidad Total

**Ejercicio:** Una marca de coches realiza el 35% de su producción en su fábrica de España, el 40% en su fábrica de Italia y el 25% en su fábrica de Portugal. La probabilidad de que un coche de esa marca fabricado en España tenga una avería en el primer año es del 4%; para los coches fabricados en Italia es del 3% y para los de Portugal es del 5%. ¿Cuál es la probabilidad de que un coche cualquiera de esa marca tenga una avería en el primer año?

{España}, {Italia} y {Portugal} son sucesos incompatibles

{España} U {Italia} U {Portugal} = E es el suceso seguro

Constituyen un sistema completo de sucesos.

Se puede aplicar el Teorema de la Probabilidad Total:

$p(\text{avería}) =$

$p(\text{España}) \cdot p(\text{avería} / \text{España}) + p(\text{Italia}) \cdot p(\text{avería} / \text{Italia}) + p(\text{Portugal}) \cdot p(\text{avería} / \text{Portugal}) =$

$0'35 \cdot 0'04 + 0'4 \cdot 0'03 + 0'25 \cdot 0'05 = 0'014 + 0'012 + 0'0125 = 0'0385 = 3'85\%$

## Teorema de Bayes

**-apuntes-**

Sean  $B_1, B_2, \dots, B_r$  un sistema completo de sucesos. Se llama **probabilidades a posteriori** a:

$$P(B_i / A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)}$$

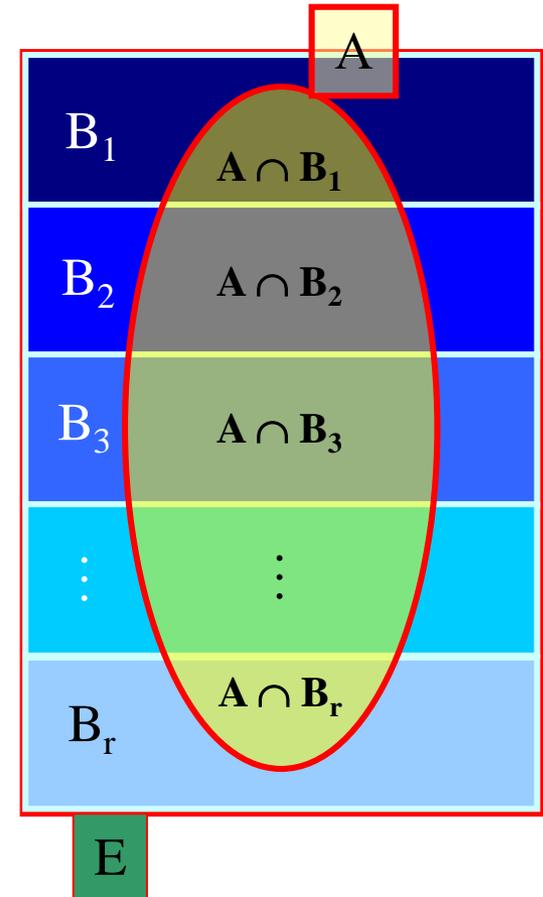
Sabemos que:  $P(A \cap B_i) = P(B_i \cap A) = P(B_i) \cdot P(A / B_i)$

Por el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A / B_1) + P(B_2) \cdot P(A / B_2) + \dots + P(B_r) \cdot P(A / B_r)$$

Sustituyendo ambas expresiones, sale la Fórmula de Bayes:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A / B_i)}{P(B_1) \cdot P(A / B_1) + P(B_2) \cdot P(A / B_2) + \dots + P(B_r) \cdot P(A / B_r)}$$



## Teorema de la Probabilidad Condicionada (Teorema Bayes)

**Ejercicio:** Una marca de coches realiza el 35% de su producción en su fábrica de España, el 40% en su fábrica de Italia y el 25% en su fábrica de Portugal. La probabilidad de que un coche de esa marca fabricado en España tenga una avería en el primer año es del 4%; para los coches fabricados en Italia es del 3% y para los de Portugal es del 5%. ¿Cuál es la probabilidad de que un coche haya sido fabricado en Portugal y tenga avería?

En este ejemplo se ve bien por qué se llama a este tipo de probabilidad **probabilidad a posteriori**: se refiere a un suceso del pasado (país de fabricación) conociendo otro suceso posterior (avería), en un razonamiento “hacia atrás”, inverso al que era habitual. División entre “bayesianos” y “no bayesianos”.

$$P(A|B) = \frac{P(A) \times P(A|B)}{\sum (P(A) \times P(A|B) + P(B) \times P(B|A))}$$

$$\begin{aligned} P(\text{Portugal}|\text{Averia}) &= \frac{P(\text{Portugal}) \times P(\text{Portugal}|\text{Averia})}{P(\text{España}) \times P(\text{España}|\text{Averia}) + P(\text{Italia}) \times P(\text{Italia}|\text{Averia}) + P(\text{Portugal}) \times P(\text{Portugal}|\text{Averia})} \\ &= \frac{0,25 \times 0,05}{(0,35 \times 0,04) + (0,4 \times 0,03) + (0,25 \times 0,05)} \\ &= 0,32 = 32\% \end{aligned}$$